Составила: доц. Востокова Р.П.,
компьютерная вёрстка: доц. Востокова Р.П.

МАТЕМАТИКА 6

Памятка по ключевым вопросам теории для подготовки к экзамену

1. Классическое определение вероятности

Пусть производится некоторый опыт. Непосредственный результат опыта называют элементарным событием или исходом. Множество всех элементарных событий обозначают Ω. Появление какого-либо исхода исключает появление других исходов и все исходы равновозможны.

Любое событие, которое может произойти или не произойти в результате эксперимента, называют случайным событием.

Совокупность элементарных событий, появление которых влечёт появление события A, называют событиями, благоприятствующими событию A.

Пусть Ω — конечное множество. Тогда вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{k}{n},$$

где k - число благоприятствующих исходов, n - число всех исходов.

2. Определение условной вероятности события.

Условной вероятностью события B при условии появления события A называется отношение вероятности произведения событий A и B к вероятности события A:

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}\ , P(A) \neq 0$$

3. Определение независимых событий

События A и B называются независимыми, если вероятность произведения данных событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

4. Определение несовместных событий

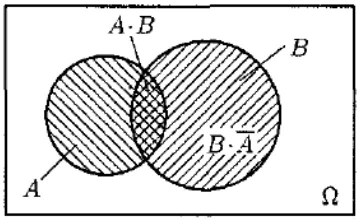
События называют несовместными, если появление одного из них
исключает появление других событий в одном и том же испытании.

5. Вероятность суммы событий

Теорема.

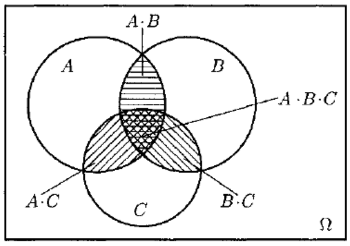
1) Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



Теорема. Вероятность суммы трёх совместных событий:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$
$$-P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$



6. Вероятность произведения событий

Теорема. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A).$$

7. Формула полной вероятности

Теорема. Пусть событие A может произойти вместе с одним из событий H_1, H_2, ..., H_n, называемых гипотезами и удовлетворяющих следующим свойствам:

$$\forall i \neq j:\ H_i \cdot H_j = \varnothing, \text{ и } H_1 + H_2 \ldots + H_n = \Omega,$$

то есть образующими полную группу, тогда

$$P(A) = P_{H_1}(A)P(H_1) +$$
$$P_{H_2}(A)P(H_2) + \ldots + P_{H_n}(A)P(H_n).$$

8. Формула Байеса

Теорема. Пусть событие A может произойти вместе с одним из событий H_1, H_2, ..., H_n, называемых гипотезами и удовлетворяющих следующим свойствам:

$H_i \cdot H_j = \varnothing, i \neq j$ и $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega,$ то есть образующими полную группу, тогда **условная вероятность гипотезы H_i при условии, что событие A произошло**

$$P_A(H_i) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{H}_i)\mathrm{P}_{\mathrm{H}_i}(\mathrm{A})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}\ ,$$

где $P(A) = P_{H_1}(A)P(H_1) +$
$P_{H_2}(A)P(H_2) + \ldots + P_{H_n}(A)P(H_n).$

9. Формула Бернулли

Теорема. Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A одна и та же и равна p , то вероятность того, что событие A появится в этих n

испытаниях ровно m раз, выражается формулой Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad m = 1, 2, \dots, n,$$

где $q = 1 - p$, а $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

10. Функция распределения случайной величины.

Определение. Функцией распределения случайной величины X называется функция, которая каждому вещественному числу $x \in (-\infty, +\infty)$ ставит в соответствие вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньшее, чем x.

$$F(x) = P(X < x).$$

11. Свойства функции распределения.

1. Условие ограниченности:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. Условие неубывания: если $x_1 \le x_2$, то

$$F(x_1) \le F(x_2).$$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

4. Вероятность того, что значение, принятое случайной величиной X попадёт в промежуток (a, b), вычисляется по формуле

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

5. Функция распределения непрерывна слева, то есть

$$\lim_{x \to a-0} F(x) = F(a).$$

12. Плотность распределения непрерывной случайной величины.

Плотностью распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная её функции распределения: $f(x) = F'(x)$.

13. Свойства плотности распределения.

1. Условие неотрицательности

$$f(x) \ge 0.$$

2. Вероятность попадания непрерывной случайной величины X в промежуток $[a, b]$ равна определённому интегралу от её плотности в пределах от a до b

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx.$$

3. Функция распределения непрерывной случайной величины X может быть выражена через её плотность по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

4. Условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

14. Математическое ожидание случайной величины

Определение 1. Математическим ожиданием дискретной случайной величины X, имеющей закон распределения $p_i = P(X = x_i)$, называется **число**, равное сумме произведений всех её значений на соответствующие им вероятности

$$M(X) = \sum_i p_i x_i.$$

Определение 2. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины, имеющей плотность распределения вероятностей $f(x)$ называется число

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx.$$

15. Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной равно самой этой постоянной: $M(C) = C$.
2. Постоянный множитель выносится за знак математического ожидания: $M(CX) = CM(X)$.
3. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.
4. $M\big(X - M(X)\big) = 0$.
5. Пусть X и Y независимые случайные величины, тогда $M(X \cdot Y) = M(X)M(Y)$.

16. Дисперсия

Определение. Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата её отклонения от своего математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2$$

Дисперсия характеризует разброс значений случайной величины X от её математического ожидания.

На практике дисперсию удобно находить по формуле

$$D(X) = M(X^2) - \big(M(X)\big)^2.$$

Для дискретной случайной величины

$$D(X) = \sum_i x_i^2 p_i - (MX)^2.$$

Для непрерывной случайной величины

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \big(M(X)\big)^2.$$

17. Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3. Пусть X и Y независимые случайные величины, тогда

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

4. $D(X + C) = D(X)$.

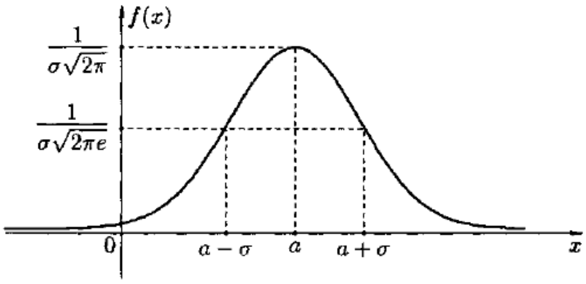
5. Пусть X и Y независимые случайные величины, тогда

$$D(XY) = M(X^2)M(Y^2) - \left(M(X)\right)^2\left(M(Y)\right)^2.$$

18. Основные законы распределения случайных величин и их числовые характеристики

1. Непрерывная случайная величина X распределена по **нормальному** закону с параметрами $\boldsymbol{a}$ и **σ,** если её плотность распределения имеет вид

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}, \qquad \boldsymbol{x \in R}.$$



Числовые характеристики $M(X) = a, D(X) = \sigma^2$.

Если $a = 0, \sigma = 1$, то нормальное распределение называется стандартным. Функция распределения стандартной случайной величины имеет вид

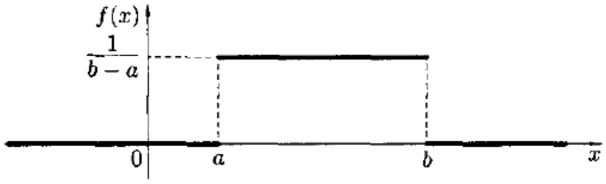
$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}} \int_{-\infty}^{x} \boldsymbol{e^{-\frac{t^2}{2}} dt}.$$

и называется функцией Лапласа, значения для которой находятся по таблицам. Вероятность попадания нормально распределённой случайной величины в промежуток $[\alpha, \beta]$

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

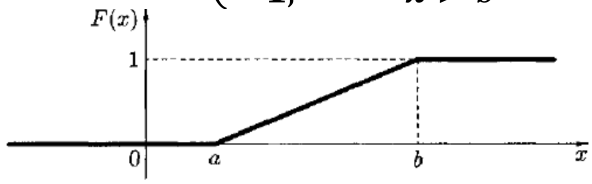
2. Непрерывная случайная величина X имеет **равномерное** распределение на отрезке $[a, b]$, если её плотность вероятности $f(x)$ постоянна на этом отрезке, а вне его равна нулю:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}}$$



Функция распределения для равномерного распределения

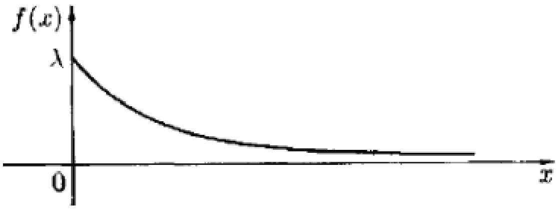
$$\boldsymbol{F(X) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}}$$



Числовые характеристики $M(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

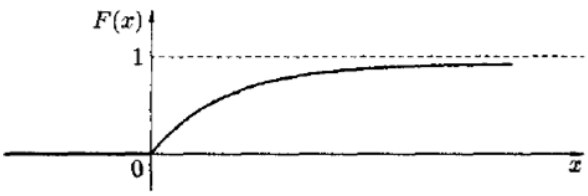
3. Непрерывная случайная величина X имеет **показательный** закон распределения с параметром $\boldsymbol{\lambda}$, если её плотность вероятности имеет вид

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}}$$



Функция распределения для показательного закона

$$\boldsymbol{F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}}$$



Числовые характеристики $M(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

4. Дискретная случайная величина X имеет распределение **Пуассона,** если её возможные значения: 0, 1, 2 …, m, …, а соответствующие вероятности находятся по формуле

$$\boldsymbol{P(\{X = m\}) = \frac{a^m e^{-a}}{m!}},$$

где $\boldsymbol{a}$- параметр распределения.

Числовые характеристики $M(X) = D(X) = a$.